TD 13 : Suites

Généralités (pratique)

1 ★★☆ (*Sens de variation*) Étudier la monotonie éventuelle (en précisant si elle est stricte) des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad b_n = \frac{2+(-1)^n}{3^n} \qquad c_n = \frac{n^n}{n!}$$

2 ★★☆ (*Calcul de limite*) Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = n^2 \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$
2) $u_n = \dfrac{3+5n-2n^3}{-5n^3+\cos n}$
3) $u_n = \dfrac{(2+\cos n)^n}{4^n}$
4) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$
5) $u_n = \dfrac{e^n}{n \ln n}$
6) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7) $u_n = (3+\sin n)^{\frac{1}{n}}$
8) $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$
9) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
10) $u_n = \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

3 ★★☆ Étudier la nature de la suite de terme général

$$u_n = \left\lfloor 3 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$$

4 ★★☆ (*Série harmonique*)

1) Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad \ln(1+x) \leq x$
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3) En déduire la nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

5 ★★

1) Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) En déduire la limite de $u_n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$, où α est un réel fixé.

6 ★★★ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Généralités (théorie)

7 ★★ Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute suite croissante admet une limite (finie ou non).
2) Toute suite décroissante est majorée.
3) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $|u_n| \to \ell$, alors $u_n \to \ell$ ou $u_n \to -\ell$.
4) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5) La somme de deux suites convergentes est convergente.
6) La somme de deux suites divergentes est divergente.
7) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

8 ★★ Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer un rang N, pas forcément le meilleur, à partir duquel :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} < \varepsilon$
2) $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$
3) $\sqrt{n^2-n} > A$
4) $3^n - 2^n > A$

9 ★★ En utilisant la définition de la limite, montrer que :

1) $\dfrac{1}{n^2+1}$ tend vers 0.
2) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ tend vers $+\infty$.
3) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 1.
4) $2n - n^2$ tend vers $-\infty$.

10 ★★ Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers un réel ℓ fixé.

1) On suppose $\ell < 1$. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Quelle est sa nature ?

2) On suppose $\ell > 1$. Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Quelle est sa nature ?

3) Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

4) Application : déterminer les limites de $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$ et de $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$. On admet que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$.

11 ★★☆ Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

12 ★★★ (**Moyenne de Césaro**) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $v_n \to 0$. Indication : pour tous entiers naturels $n \geq N$

$$|v_n| \leq \left|\frac{u_1+\cdots+u_N}{n}\right| + \left|\frac{u_{N+1}+\cdots+u_n}{n}\right|$$

2) En déduire que si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

3) Donner un exemple de suite (u_n) telle que la suite (v_n) ci-dessus converge, mais pas (u_n).

4) Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.

Suites implicites

13 ★★☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$(E_n) : \quad x + \tan x = n$$

1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.

2) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

14 ★★★ Étudier la nature de la suite (u_n) où u_n est la n–ième décimale de $\sqrt{2}$.

Suites extraites, adjacentes, etc.

15 ★ Montrer que la suite de terme général $u_n = e^{(-1)^n n}$ est divergente.

16 ★★ Montrer que les suites de termes généraux suivants convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

17 ★★ On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

18 ★★ Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n})$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

19 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

20 ★★★ Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

21 ★★★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \dfrac{1}{2}u_{3n} \to 0$.

1) Montrer que si α est une valeur d'adhérence de (u_n), alors -2α aussi.

2) On suppose que (u_n) converge. Déterminer sa limite.

3) Montrer que (u_n) converge.

22 ★★★ Montrer qu'une suite (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

Suites récurrentes

23 ★ Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

24 ★☆ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = (n+1)u_n + (n+1)!$$

Calculer u_n. On pourra poser $v_n = \frac{u_n}{n!}$.

25 ★☆ (*Suites récurrentes doubles*) Déterminer le terme général des suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
2) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{4}}u_{n+1} + 2iu_n$

26 ★★ Déterminer la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pourra poser $v_n = u_n - 2$.

27 ★★ On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 v_n \\ v_{n+1} = u_n v_n^2 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n, v_n \in \left]0,1\right[$.
2) En déduire le sens de variation de (u_n) et (v_n), et déterminer leur limite.

28 ★★☆ (*Suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$*) Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
2) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \arctan(u_n)$
3) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$
4) $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2$ (on discutera selon la valeur de u_0).

29 ★★☆ On cherche toutes les suites réelles (u_n) vérifiant $(E) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

1) Soit (u_n) une solution. On note $C = u_0 \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite. Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de C.
2) En déduire toutes les suites solutions de l'équation homogène $(E_H) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 0$ et les exprimer en fonction de $C = u_0$.
3) Déterminer une solution particulière de (E). On appliquera la méthode de la variation de la constante : on remplace C par C_n dans la solution de (E_H), puis on injecte cette expression dans (E), et enfin on trouve une suite (C_n) qui convient.
4) En déduire les solutions de (E).